Maudits angles

par Champy

A la lecture de quelques questions posées sur les forums (fora), il semble que certains annonceurs ont oublié quelques pages de leurs manuels scolaires de math…

Pourtant, la trigonométrie de base, ce n'est vraiment pas compliqué. Il n'y a que quelques formules à connaître et on se sort généralement de toutes les situations. Concernant des artistes du travail du bois qui connaissent des tas de trucs très compliqués, je trouve étonnant qu'ils ne se soient jamais penchés sur ce sujet. Mais bon… il est vrai que le problème est généralement assez mal présenté à l'école et je comprends qu'ils aient un peu 'zappé' leurs cours pour aller observer les arbres dans la forêt.

Pythagore

Commençons par la relation certainement la plus utile. Celle qui définit la qualité n° 1 de tout triangle rectangle (vous savez, celui qui a un angle qui bout à 90°…) :

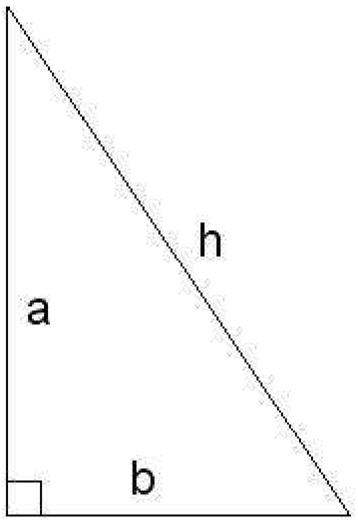
La somme des carrés de chacun des cotés situés de part et d'autre d'un l'angle droit est égale au carré du coté restant (aussi appelé hypoténuse).

Certains le connaissent peut-être ainsi :
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal si je ne m'abuse à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Ce n'est ni Einstein, ni Drucker, ni Doc Gynéco qui ont pondu ça, mais un petit grec barbu qui a vécu il y a quelques siècles….

Relation (ou formule)

En mathématique, on cherche souvent à traduire un énoncé en formule. Le théorème de Pythagore n'échappe pas à cette « règle » :



Notations utilisées :

- a et b : côtés de l'angle droit
- h : hypoténuse (côté opposé à l'angle droit).

Avec ces notations, on a :

- $a^2 + b^2 = h^2$

ou écrit autrement :

- $a*a + b*b = h*h$

Une application connue

Si on a un triangle dans lequel a=3 m, b= 4 m et h=5 m

- On a pour les côtés de l'angle droit : $3^2+4^2 = 9 + 16 = 25$
- Et $h^2 = 5^2 = 5*5 = 25$

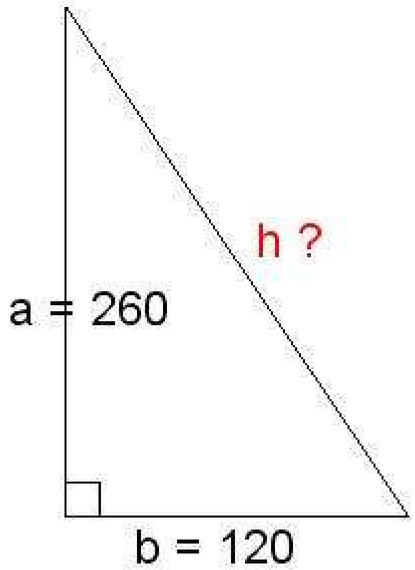
Ce triangle est **rectangle** et nous pouvons ainsi construire une équerre.
C'est l'équerre du jardinier (ou du maçon) composée de trois morceaux de ficelle de 3, 4 et 5 m
Nous verrons plus loin que l'on peut se construire des équerres de taille inférieure.

Autres utilisations

Si l'on connaît la valeur d'au moins deux des côtés (et n'importe lesquels), on peut très facilement calculer la troisième.

Premier exemple :

Nous connaissons les valeurs des cotés perpendiculaires (a et b) et on cherche à connaître l'hypoténuse (h). Bien sûr, a et b seront dans les mêmes unités



Dans un premier temps, il suffit d'additionner les carrés de a (260 mm) et de b (120 mm).

On aura donc :
260*260 + 120*120 = 67600 + 14400 = 82000

Ce nombre représente donc le carré de l'hypoténuse ($h^2 = 82000$)

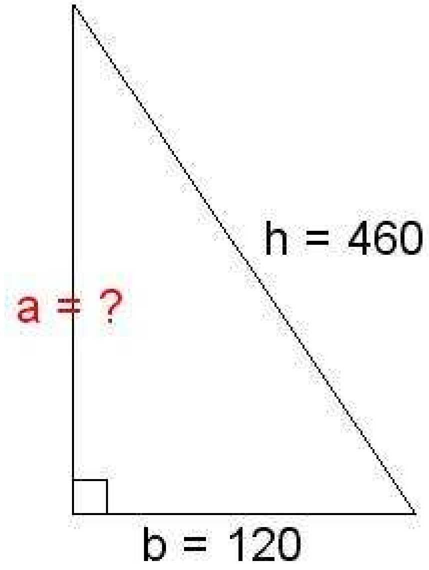
Pour obtenir h, il faudra donc trouver le nombre qui, multiplié par lui-même, donne le nombre qu'on vient de trouver. Ce résultat s'appelle la 'racine carrée' (et ça n'a rien à voir avec les branches souterraines d'un arbre…).

$h = \sqrt{82000} = 286$ mm

De tête, le résultat est très difficile à calculer. Par contre, pratiquement toutes les calculettes actuelles savent effectuer ce calcul en une fraction de seconde. Le symbole indiqué sur les claviers est souvent ce symbole $\sqrt{\ }$.

Sur certaines calculettes, ce sigle n'est parfois pas directement dessiné. Il faut alors faire la manip suivante : une des touches comporte certainement le dessin symbolisé du carré d'un nombre (le plus souvent x^2). Pour obtenir son inverse (donc notre fameuse 'racine carrée'), il suffit d'appuyer sur la touche 'Inv' (ou 'Shift') avant d'appuyer sur la touche (x^2).

Deuxième exemple :



Nous connaissons la valeur d'un des côtés (b = 120 mm et la valeur de h = 460 mm) et nous cherchons la valeur de a.

On va appliquer la même formule de base, en la triturant un petit peu.

- $a^2+b^2 = h^2$, alors
- $a^2 = h^2-b^2$

Ben voilà ! Il suffit de calculer h^2-a^2 (ou bien h*h - a*a) et on obtient le carré du nombre recherché (b). Ensuite il faut calculer la racine carrée du nombre obtenu pour connaître la valeur de b.

Faites le calcul, vous devez trouver :

- a = 444 mm

Se fabriquer son (ses) équerre(s)

Connaissant cette formule, il est aisé de construire un triangle rectangle 'parfait' sans équerre, compas ou rapporteur d'angle. C'est le plus souvent quand même plus pratique avec une équerre, mais l'instrument dont on dispose est parfois trop court, gêné par un assemblage ou ne permet pas d'avoir une surface plane suffisamment longue pour que l'appui soit précis.

On a vu dans un paragraphe précédent qu'il existait trois chiffres magiques. Ce sont les chiffres 3, 4 et 5. On appelle ça 'la règle des 3, 4, 5', bien connue des maçons (ou des jardiniers) pour tracer précisément des angles droits de grandes dimensions.
Par chance, ces chiffres s'accordent pour définir les longueurs des trois cotés d'un triangle rectangle parfait. Et tout simplement parce que la formule initiale est exactement respectée :
3*3 + 4*4 = 5*5.
On retrouve nos côtés a et b (respectivement égaux à 3 et 4) et le coté h (égal à 5).

Cette coïncidence est très intéressante, parce que ça marche également pour tous les multiples ou sous-multiples de ces nombres.
Ça marche très bien pour :

- la triplette (6, 8, 10), où on les a simplement multiplié tous les nombres par 2,
- la triplette (30, 40, 50) en les multipliant par 10,
- la triplette (3*k, 4*k, 5*k) où k est un coefficient multiplicateur [k= 2 et k=10 dans les deux exemples précédents].

Du côté pratique, cette relation est très utile pour vérifier si un angle est bien droit (donc si son point d'ébullition est bien 90°…). Elle est même bien plus précise que toutes les équerres du monde (surtout après qu'elles se soient déformées suite à leur chute au sol à maintes reprises…).

Il suffit de repérer 3 unités quelconques (ou multiples de 3, avec un coefficient k) sur un des cotés de l'angle droit (a), 4 unités (ou 4 * k) sur l'autre coté de l'angle droit (b), et vérifier que la longueur du coté restant (h) est bien de 5 unités (ou 5 * k).

Un exemple pratique

Vous avez tracé un angle droit sur une planche et vous doutez de la perpendicularité de ses côtés.

- Admettons que le plus petit des côtés fasse environ 35 cm.
- Il suffit de repérer une mesure multiple de 3 sur ce côté-là : disons 3 * 10 (pour un k = 10), soit 30 cm. Donnez un petit coup de crayon à l'extrémité de la mesure.
- Mesurer 4 * k, soit 40 cm, sur le côté censé être perpendiculaire (autre petit coup de crayon),
- Vérifier que la distance entre vos deux coups de crayon (hypoténuse) fait bien 5 * k, soit 50 cm. C'est aussi simple que ça et reste d'une fiabilité absolue !

Dernière remarque :

Dans le cas d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit ont la même valeur (on dit alors 'triangle rectangle isocèle') – 45° de part et d'autre de l'angle droit – on peut calculer la longueur de a ou de b (car identiques) ou bien celle de h, en ne connaissant qu'une des longueurs du triangle. Dans ce cas, on se sert de la formule suivante :

$h = a \times \sqrt{2}$ (lire Racine Carrée de 2) [on peut bien sûr remplacer a par b]
$a = \frac{h}{\sqrt{2}}$ (lire h divisé par RacineCarrée de 2)

Racine Carrée de 2 est une valeur constante très proche de 1,414. Votre calculette peut aisément la retrouver si vous l'oubliez…

Relations trigonométriques

Passons maintenant à d'autres calculs un peu plus complexes avec les triangles. Il s'agit de ceux où l'on connaît les longueurs d'au moins 2 des côtés et où l'on cherche à connaître la valeur des angles (en dehors de l'unique angle droit, évidemment…)

On va pour cela utiliser des 'mots' qui ont fâché (et fâcheront sûrement encore longtemps) des générations d'écoliers : le sinus, le cosinus et la tangente (non, non, ne la prenez pas…) et dont les abréviations sont Sin, Cos, Tan (Tg pour les anciens)

Argh ! J'en vois qui veulent abandonner cette lecture ! C'est dommage, parce que ça n'est pas si compliqué que ça à utiliser…
Il suffit de se souvenir d'une toute petite phrase, qui n'a d'ailleurs aucun sens, mais qui permet de retrouver les formules de base très aisément.

Dans un **triangle rectangle**, ce sont des définitions à connaître. Je vous propose un moyen mnémotechnique pour les retenir. Vous pouvez en utiliser un autre, le tout étant de … ne pas oublier le moyen mnémotechnique.

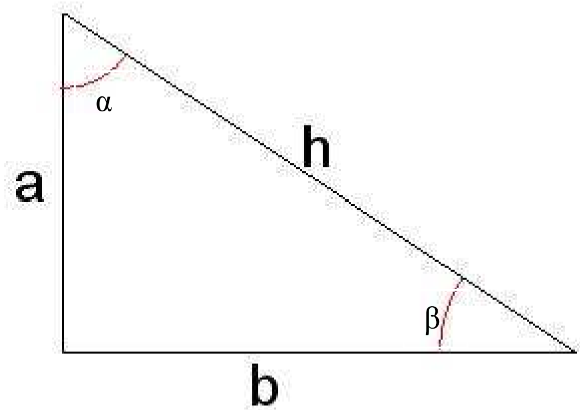
Pour ce moyen mnémotechnique, on utilise trois mots : Soch Cach Toa ! (En imaginant qu'un 'pékin' quelconque s'appelle 'Soch', on peut imaginer qu'on lui a demandé de se cacher…)
A quoi sert ce charabia ?

Définition	Utilisation
$\sin(angle) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$	Et bien, le premier mot rappelle la première formule à connaître. 'Soch' correspondant à : ***S**inus(angle) = Côté **O**pposé / **H**ypoténuse* On retrouve les lettre S, O et H du mot 'Soch' dans la formule (et dans l'ordre, SVP)
$\cos(angle) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$	Le mot 'Cach' correspond à : ***C**osinus(angle).= Côté **A**djacent / **H**ypoténuse* Même remarque avec les lettres C, A et H
$\tan(angle) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$	Le mot 'Toa' correspond à : ***T**angente(angle)=Côté **O**pposé / Côté **A**djacent* Même remarque avec les lettres T, O et A

L'explication de ce moyen mnémotechnique est un peu longue, mais tous les gens qui l'ont appris un jour s'en souviennent toute leur vie. Et ils ne s'embrouillent plus jamais les méninges avec la trigo…

Bon alors, à quoi servent ces formules ?

OK, re-petit dessin…



Ce qui nous intéresse ici, ce sont les valeurs des angles α et β (lire alpha et béta), qu'on voudrait bien calculer au mieux pour régler son guide de coupe.
Vous reconnaissez certainement le segment appelé 'hypoténuse' et repéré sur le dessin par la lettre h. Quel que soit l'angle auquel on s'intéresse, celui-ci s'appellera toujours 'hypoténuse'.

Par contre, les deux autres cotés (a et b) peuvent être appelés différemment en fonction de l'angle (α ou β) auquel on s'intéresse :

Si on s'intéresse à l'angle α, on dit que son coté Opposé (coté situé à l'opposé de sa position), c'est b.
Son coté Adjacent, <u>**c'est 'celui qui le touche'**</u>, soit a dans ce cas.

Maudits angles

par Champy

Par rapport à l'angle β, vous aurez compris que le coté Opposé est a, et le coté Adjacent est b. Voilà maintenant comment on utilise les formules issues de la phrase 'magique' :

Rappelons tout d'abord que **Soch** exprime que : $\sin(angle) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

Dans notre cas, on a donc la relation : $\sin(\alpha) = \frac{b}{h}$ ou encore Sin (α) = b / h.

Avec **Cach**, ça donne : $\cos(\alpha) = \frac{a}{h}$ ou encore Cos(α) = a / h

Et avec **Toa**, ça donne : $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$ ou encore Tan(α) = b / a

C'est évidemment la même chose avec l'angle β, mais on doit remplacer les côtés opposé et adjacent par les valeurs correspondantes.

Simple pour l'instant, non ?

Nous avons vu que le Sinus, le Cosinus ou la Tangente d'un des angles inconnus peut être calculé à condition qu'on connaisse au moins les longueurs de 2 des côtés du triangle (et quels qu'ils soient). En pratique, on choisit l'une ou l'autre des formules en fonction des 2 côtés que l'on connaît (ou de la cote qu'on veut obtenir).

Et si maintenant, on calculait l'angle !

Nous pouvons donc calculer le Sinus, le Cosinus ou la Tangente de l'angle qui nous intéresse. Bon, c'est bien joli… mais ce qu'on cherche, c'est la valeur de l'angle, et pas celle de son Sinus, Cosinus ou Tangente…
Ha bon…Alors, il faudra retrouver l'angle en connaissant la valeur de son Sinus, Cosinus ou Tangente.

Mais comment je fais, moi ?
Eh bien, on attrape encore sa calculette (là il faut qu'elle soit un peu plus 'évoluée'…) et on va lui demander de faire le boulot à notre place. Ouf, heureusement qu'elle est là, celle-là !
(Pour information, la petite calculette livrée d'origine avec Windows permet d'effectuer ce type de calcul. Il suffit de cocher l'item 'Scientifique' dans son menu 'Affichage')

Ce qu'on recherche, c'est la valeur de l'angle dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente.
Selon le cas, ça s'appelle ArcSinus, ArcCosinus ou bien ArcTangente (selon le cas).

C'est, pour ainsi dire, 'l'opposé' du Sinus, Cosinus ou Tangente (bien que le mot 'opposé' soit un peu tiré par les cheveux dans ce cas…).

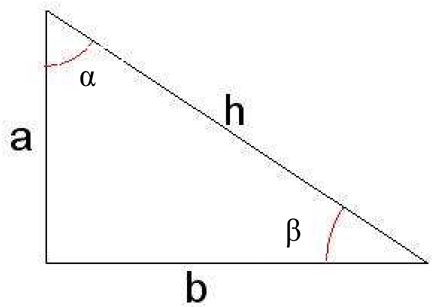
D'ordinaire, ces valeurs sont notées ASin, ACos et ATan sur une calculette, ou bien, si ces sigles sont absents et il faut, comme pour la racine carrée, appuyer sur 'Inv' ou 'Shift' puis sur la touche Sin, Cos ou Tan pour obtenir le résultat désiré (soit la valeur 'opposée' de ce qu'on connaît).

Maudits angles

par Champy

- Et là, on obtient enfin l'angle ? Ben dis-donc, c'est plutôt compliqué ta manip…
- Mais non, gros β ! Tu va voir…c'est bien plus rapide et précis que ton rapporteur en plastoc !

Exemple pratique :
Admettons que tu dois régler ton guide coulissant sur un angle donné afin de faire une découpe à la scie circulaire. Manip assez fréquente, non ?
On reprend le dessin précédent :



On suppose que :
- a = 450 mm
- b = 800 mm

On cherche α

Bon ! Pour connaître la valeur de l'angle à afficher, il te suffit de mesurer seulement deux des cotés existants (dont tu connais certainement déjà les cotes),
On connaît donc le côté opposé et le côté adjacent.
On doit donc utiliser la tangente et on a : $\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{800}{450} = 1{,}78$ (valeur arrondie)
Il faut maintenant chercher l'angle dont la tangente vaut 1,78. On va donc utiliser ATan (arc tangente) et faire calculer ATan de 1,78.
Tu devras trouver : 60,7°
Ensuite, je te laisse libre d'arrondir le chiffre trouvé à ta guise, parce qu'il risque de comporter quelques décimales…

Attention, certaines calculatrices peuvent donner ce résultat en radian (une autre mesure d'angle). Il faut penser à mettre cette calculatrice en degré. C'est le cas pour la calculatrice scientifique de Windows.

Pour résumer, lorsqu'on recherche la valeur d'un angle par le calcul, il suffit de savoir mettre une étiquette (Opposé, Adjacent et Hypoténuse) sur chacun des cotés que l'on a. En fonction de cet étiquetage, il y a trois possibilités :
- *Si Opposé et l'Hypoténuse sont connus, on doit utiliser le Sinus (**Soch**…)*
- *Si Adjacent et l'Hypoténuse sont connus, on doit utiliser le Cosinus (**Cach**…)*
- *Si Opposé et l'Adjacent sont connus, on doit utiliser la Tangente (**Toa**…)*

Si par hasard, on connaît les trois côtés, alors on a le choix, parce que les trois calculs donneront exactement le même résultat.

Allez, une chtit' bière pour refroidir les méninges… et bons copeaux !

Champy

Texte : Champy Mise en page : BernardLimont Relecture : Ubu